

„Daten und Zufall“ mit „Modellieren“ verknüpfen: Bildungspotenzial am Beispiel von Datendarstellungen zum Arktis-Eis

STEFAN POHLKAMP, AACHEN

Zusammenfassung: Bei der Anwendung von Mathematik werden Zuschreibungen der Mathematik wie die eindeutige Richtigkeit des Kalküls fälschlicherweise dem Sachkontext zugeschrieben, etwa wenn Daten als neutrales, eindeutiges Abbild der Wirklichkeit gelten. Deshalb bedarf es einer Reflexion zum Verhältnis von Realität und Mathematik, die neben der Statistik auch die Modellierung umfasst. Denn es lässt sich nicht nur auf curricularer Ebene eine relevante Schnittmenge zwischen „Daten und Zufall“ und „Modellieren“ finden, sondern auch an konkreten Lernumgebungen zum Arktis-Eis zeigt sich der Bildungswert, wenn Datendarstellungen kritisch in Hinblick auf uneindeutige Entscheidungen im Erstellungsprozess hinterfragt werden.

1 Einleitung

„Man kann nicht immer neue Grenzwerte erfinden“ (Armin Laschet am 15.2.21)¹. In der aktuellen Pandemie wurde regelmäßig öffentlich darum gerungen, welche Größe z. B. Verdopplungszahl, R-Wert oder 7-Tage-Inzidenz am geeignetsten ist, die aktuelle Lage zu COVID-19 zu erfassen. Ebenso wurden für einige der Größen Grenzwerte definiert, bei der sich aus dieser Situationsbeschreibung Lockerungen oder Verschärfungen der Kontaktregeln ergaben. Bei der 7-Tage-Inzidenz waren dies etwa die Werte 50, 100 oder 165. Die Äußerung weist aber über den konkreten Kontext hinaus: Werden solche Kenngrößen aus einem Datensatz abstrahiert und herausgelesen oder werden sie erfunden bzw. hineingelesen?

Diese Frage nach der neutralen Abbildungsfunktion von Mathematik bzw. nach den Gestaltungsmöglichkeiten von Mathematik-Betreibenden spannt einen Zusammenhang zwischen der Leitidee „Daten und Zufall“ und der Kompetenz „Modellieren“. Im Folgenden liegt die These zugrunde, dass ein Transfer von (Meta-)Wissen zu Modellierungen eine kritische Grundhaltung im Umgang mit Daten fördert (Pohlkamp 2021a). Eine solche Mündigkeit als Beitrag zur staatsbürgerlichen Erziehung schärft einen Aspekt von *statistical literacy* aus, mit der allgemeinbildende Kompetenzen zu datenbezogenen Argumentationen und Bewertungen sowie zu deren Reflexion zusammengefasst werden (Krüger 2016). Diese Überlegungen werden an konkreten Lernmaterialien veranschaulicht, mit denen Schüler:innen exempla-

risch Daten zum Arktis-Eis erkunden und reflektieren können.

2 Gemeinsamkeiten zwischen „Daten und Zufall“ und „Modellieren“

Die beiden Begriffe „Daten und Zufall“ und „Modellieren“ entstammen den Bildungsstandards (KMK 2003): Während ersteres in Form einer Leitidee ein Konzept darstellt, mit dem mathematische Inhalte zusammengefasst und geordnet werden, referiert letzteres auf eine Erscheinungsform mathematischen Arbeitens und rückt das Handeln und die dazu benötigten Fähigkeiten von Schüler:innen in den Vordergrund.

Angesichts der naheliegenden Frage, welcher Zusammenhang zwischen diesen beiden Aspekten von Mathematikunterricht besteht, lohnt sich eine Gegenüberstellung der jeweiligen Charakterisierungen (s. Tab. 1). Dabei ergeben sich Überschneidungen bei den Operatoren „interpretieren“ und „reflektieren“. Wobei nach dem Objekt dieser Tätigkeiten unterschieden werden muss: Satz ersetzen durch: Werden die Daten selbst interpretiert, sollen aus den Daten abgeleitete Argumente reflektiert werden, während im anderen Fall zwar die Modelle selbst reflektiert werden, sich die Interpretation aber auf konkrete Ergebnisse der Modellierungen bezieht (KMK 2003, S. 12, 14). Beim Modellieren wird insbesondere Interpretieren explizit mit dem Abgleich von Realität in Bezug gesetzt. Zudem wird die Zuordnung von Mathematik und Realität bei den ersten beiden Anforderungsbereichen von Modellieren als explizites Lernziel dargestellt. Auffällig ist jedoch, dass sowohl im dritten Anforderungsbereich als auch in der Leitidee Daten und Zufall offenbleibt, inwieweit Interpretation und Reflexion mit einer Auseinandersetzung von dem Verhältnis von Mathematik und Realität einhergehen.

Eine weitere semantische Nähe lässt sich noch zwischen den Tätigkeiten „bewerten“ und „kritisch beurteilen“ (ebd.) finden. Explizit ist „Daten und Zufall“ und „Modellieren“ also gemein, dass von Schüler:innen eine kritische Auseinandersetzung zu einem Thema mit anschließender Meinungsbildung verlangt wird. Damit wird im Sinne einer staatsbürgerlichen Erziehung auf das Bildungsideal der Mündigkeit verwiesen (Lengnink 2005, S. 29).

Leitidee Daten und Zufall	Mathematisch modellieren		
	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern und Reflektieren
Die Schülerinnen und Schüler – werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus, – planen statistische Erhebungen, – sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software), – interpretieren Daten unter Verwendung der Kenngrößen, – reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren, – beschreiben Zufallerscheinungen in alltäglichen Situationen, – bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.	vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen Resultate am Kontext prüfen	Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen Ergebnisse einer Modellierung interpretieren und an der Ausgangssituation prüfen einem mathematischen Modell passende Situationen zuordnen	komplexe oder unvertraute Situationen modellieren verwendete mathematische Modelle (wie Formeln, Gleichungen, Darstellungen von Zuordnungen, Zeichnungen, strukturierte Darstellungen, Ablaufpläne) reflektieren und kritisch beurteilen

Tab. 1: Gegenüberstellung von Leitidee und Kompetenz nach KMK 2003

Als weitere Gemeinsamkeit werden „Darstellungen“ genannt, die begrifflich eine Nähe zur abbildenden Funktion aufweisen. Einerseits werden Darstellungen auf statistische Erhebungen bezogen und geben somit mittelbar Realität wieder. Andererseits werden sie selbst als mögliches mathematisches Modell genannt, mit dem eine Situation mathematisch zugänglich und bearbeitbar wird. (KMK 2003, S. 8, 12, 14)

Die Gegenüberstellung in den Bildungsstandards legt die Verkürzung nahe, dass der Unterschied darin besteht, ob die Realität mit Daten oder mit Modellen abstrahiert wird. Denn sie verbirgt den Zusammenhang zwischen Daten und Modellen, der in der Strukturgleichung $\text{Daten} = \text{Modell} + \text{Residuum}$ zum Ausdruck kommt (Eichler & Vogel 2013b, S. 137). Mit dieser Verbindung wird auch der Zusammenhang zwischen Realität und Mathematik analog zum Modellierungskreislauf deutlich und Daten können als „Zahlen mit einem Kontext“ (Biehler & Engel 2015, S. 229) verstanden werden. Dabei geht es aber nicht nur ein einfaches Abbilden oder Übersetzen, sondern auch um Hineinlesen als aktive Sinnkonstruktion: „Bildlich gesprochen geht es ganz grundsätzlich darum, im Nebel der Daten Muster ausfindig zu machen und diese Muster sowie das Verbleibende zu quantifizieren.“ (Eichler & Vogel 2013b, S. 136)

Statistik kann als Modellierung mit Daten umschrieben werden, wobei sich die Rolle von Daten beim

Modellieren differenzieren lässt: Sie können dem Ausgangspunkt einer (datenorientierten) Modellierung dienen und/oder zur Validierung des fertigen Modells herangezogen werden (Engel & Kuntze 2011, S. 397f.). Neben dieser strukturellen engen Verbindung weisen empirisch gewonnene Erkenntnisse darauf hin, dass datenorientiertes Modellieren statistisches Denken fördert und es einen moderaten Zusammenhang zwischen Modellieren und Veranschaulichen in statistischen Kontexten gibt (ebd., S. 404).

Im statistischen Modellierungskreislauf wird das Reduzieren von Daten und das Ermitteln statistischer Kennwerte analog zu den Modellierungsschritten Mathematisieren und mathematisches Arbeiten gesehen. Diese Tätigkeiten der Datenanalyse sind eben nicht technisch eindeutig, sondern die Entscheidung für eine Datenauswahl und für einen Kennwert prägt die mathematische Darstellung und Ergebnisfindung sowie darauf basierende Aussagen und Interpretationen. (Eichler & Vogel 2013a, S. 166–168)

Bei dieser Verbindung von Daten und Zufall mit Modellieren wird das Spannungsfeld zwischen Abbilden und Hineinlesen aufgezeigt: Hinter dem Begriff der Darstellungen steckt die Idee, dass mit Mathematik Realität abgebildet wird. Zu den Mythen über Mathematik gehört dabei die Vorstellung, dass eine solche mathematische Abbildung der Realität objektiv und

eindeutig ist (Hersh 1992, S. 130). Allerdings lässt sich in der übereinstimmenden Tätigkeit „interpretieren“ auch ein subjektiver Zugang finden. Mit dem Verweis auf die Hermeneutik wohnt der Interpretation immer der Aspekt der Poiesis inne, mit dem Rezipienten selbst Sinnkonstruktionen vornehmen und so subjektive Wirklichkeit[swahrnehmung]en schaffen (Jauß 1982, S. 118f.). In diesem Sinne haben sowohl die Rezeption von Realität in Form von Darstellungen als auch die Schlussfolgerungen aus diesen Darstellungen subjektive Anteile.

Aus den Bildungsstandards lässt sich als Gemeinsamkeit zwischen der untersuchten Leitidee „Daten und Zufall“ und der Kompetenz „Modellieren“ ableiten, dass beide das Verhältnis von Realität und Mathematik adressieren. Interpretieren und Reflektieren bilden dabei Tätigkeiten, bei denen konkrete mathematische Lerngegenstände in den Bezug zum Sachkontext gesetzt werden und dieser Bezug kritisch thematisiert wird. Übereinstimmende Zielsetzung ist dabei der Prozess einer aktiven Urteilsbildung bei den Lernenden.

3 Deskriptive vs. normative Modellierung

Die im obigen Sinne poietische Wirkung bezieht sich vor allem auf die Rezeption von Mathematik: Lernende interpretieren gegebene Daten. Der mathematikdidaktische Diskurs zur Modellierung ist geeignet, auch die Erstellungsseite in den Blick zu nehmen: Denn im Prozess der Modellbildung kann für schöpferische Handlungen sensibilisiert werden. Hinzu kommt, dass die Unterscheidung von deskriptiv und normativ einen Anlass für die Reflexion von Datendarstellungen bietet. Als deskriptiv werden dabei Modellierungen bezeichnet, bei denen lebensweltliche Phänomene mit Mitteln der Mathematik erfasst werden. Diese deskriptive Annäherung an die Realität lässt sich weitergehend in eine beschreibende, erklärende oder vorhersagende Funktion unterscheiden (Hinrichs 2008, S. 8f.). Davon abgegrenzt werden muss die normative Modellierung, bei der die Realität nicht ohne die Mathematik existiert (Sjuts 2009, S. 195). Dies ist der entscheidende Unterschied: Während man erst nach der Festlegung eines Steuertarifs Steuern zahlen kann, fällt der Apfel ohne menschliche Berechnung vom Baum. Das Fallgesetz kann diesen Vorgang nur beschreiben oder für das nächste Mal prognostizieren.

Ein Blick in Lehrpläne zeigt, dass ein deskriptives Verständnis von Modellierung vorherrscht, wenn z. B. „Wirklichkeit mit mathematischen Mitteln [...]

beschreiben“ mit „Modellieren“ gleichgesetzt wird (Bildungsministerium Mecklenburg-Vorpommern 2015, S. 3). Ein weiteres Beispiel ist die Formulierung des „darstellend-modellierende[n] Arbeiten[s]“, das mit der Metapher der „Übersetzung“ deutlich einen konkreten, zu transformierenden Gegenstand voraussetzt (Bildungsministerium Österreich 2019). Die vorschreibende Funktion von Modellierungen findet sich hingegen fast nie in Curricula (eine Ausnahme bildet der Bremer Lehrplan (Bildungssenatorin Bremen 2008, S. 14)), wobei im Modellierungsdiskurs normativ und vorschreibend/präskriptiv synonym gebraucht werden (Greefrath & Vorhölter 2016, S. 9).²

Deskriptiv und normativ sind abstrahierte Unterscheidungskategorien, in der Realität treten oft Mischformen auf, das heißt bei einer Modellierung lassen sich deskriptive und normative Elemente unterscheiden. So ist etwa die Definition einer relativen Armutsgefährdung durch die deskriptive Intention motiviert, Einkommensungleichheiten zu erfassen. Die Entscheidung, seit 2000 bei der Berechnung den Median und nicht das arithmetische Mittel als Bezugsgröße für das mittlere Einkommen heranzuziehen (Vohns 2013, S. 54), ist aber ein normativer Akt: nicht normativ im engen Sinne, dass Armut[sgefährdung] nicht ohne eine mathematische Definition existiere, aber normativ in weiterem Sinne, dass diese Entscheidung unsere Realität und/oder ihre Wahrnehmung verändert. So gilt mit der Wahl des Medians im Gegensatz zum arithmetischen Mittel nicht mehr, dass der Zuzug des superreichen Gründers von Amazon nach Deutschland die Anzahl der armutsgefährdenden Personen hier signifikant erhöht.³

Für das Bildungsziel einer mathematischen Mündigkeit zukünftiger Staatsbürger:innen ist es unabdingbar, den normativen und deskriptiven Gebrauch von Mathematik zu unterscheiden. Die Formel für den freien Fall hat einen anderen Charakter als die Berechnung der relativen Armutsgefährdung: Während man die deskriptiven Naturgesetze nicht verändern kann, wird die menschliche Handlungsfreiheit eingeschränkt, wenn normativ wirkende Modelle als genauso unveränderbar betrachtet werden. Die Normativität zeichnet sich nicht nur durch eine offensichtlich höhere Willkürlichkeit aus (Freudenthal 1978, S. 132), sondern sie ist Anlass, die neutrale Abbildungsfunktion zu hinterfragen, auf die Mathematik als Werkzeug fälschlich oft reduziert wird. Im Folgenden wird die Unterscheidung von deskriptiv und normativ auf Datenauswertungen übertragen. So werden (digitale) Visualisierungen als Versuch verstanden, die entsprechenden Daten und die damit abstrahierte Wirklichkeit deskriptiv darzustellen. Dabei

sind Kenntnisse um den normativen Gebrauch von Mathematik hilfreich bei einer kritischen Auseinandersetzung mit solchen Datenauswertungen.

4 Der Datensatz vom National Snow and Ice Center

Aktuell bewegt die Diskussion und Aufklärung zur Klimakrise Gesellschaft und Schüler:innen, wobei die Eisschmelze am Nordpol ein wirkmächtiges Bild dieser Entwicklungen darstellt. Dies soll zum Anlass genommen werden, mögliche Visualisierungen eines thematisch passenden, öffentlich zugänglichen Datensatzes kritisch zu diskutieren und das damit verbundene didaktische Potenzial aufzuzeigen. Im *Sea Ice Index* sind tagesaktuell Daten zur Meereis-Entwicklung abrufbar, die bis zum Jahr 1979⁴ zurückgehen (Fetterer 2017). Über Satellitenaufnahmen wird die Eisoberfläche – und nicht das Volumen – gemessen. Hier wird mit den Oberflächendaten gearbeitet, weil sie sich im Gegensatz zur Volumenbestimmung unmittelbar aus den Satellitenmessungen ergibt. Die Eisoberfläche ist deshalb eine eigenständige, wichtige Größe, weil über Eis Sonnenstrahlen ins All zurückreflektiert und deshalb über eine Reduktion der Eisoberfläche Erwärmungseffekte verstärkt werden (National Snow & Ice Data Center 2020). Des Weiteren ist für ein Verständnis des Sachkontexts zum Meereis und für die folgenden Darstellungen wichtig zu wissen (Pohlkamp 2021b):

- Gemessen wird nur das sich auf Wasser befindliche Eis, Eis auf Landmassen wird nicht mitgezählt (s. Abb. 1). Deshalb ist eine Betrachtung der Arktis relevanter als der Antarktis, zu der es auch Daten im Datensatz des *Sea Ice Index* gibt.
- Es wird alles Meereis der nördlichen Hemisphäre berücksichtigt, also zum Beispiel auch das Eis in der chinesischen Bohai-Bucht. Für eine bessere Verständlichkeit wird hier dennoch von „Arktis-Eis“ gesprochen.
- Der Datensatz unterscheidet zwischen „extent“ und „area“ („Ausdehnung“ und „Fläche“ im Deutschen). Vergleicht man das Meereis mit einer Scheibe Käse, wird bei der Ausdehnung alles zwischen der Käserinde berücksichtigt, während bei der Fläche noch die Käselöcher abgezogen werden.

Im Alltag steht fast nie ein ganzer Datensatz zur Verfügung, sondern oft nur eine aufbereitete Visualisierung. Deshalb sind ausgewählte Daten zur Ausdehnung und Fläche aus dem *Sea Ice Index* in

GeoGebra exportiert und dort graphisch veranschaulicht worden. Für einen späteren Vergleich der beiden Größen existieren die Dateien jeweils doppelt, einmal mit den Daten der Ausdehnung, einmal mit denen der Fläche. Anhand dieser Lernumgebungen⁵ können Schüler:innen die Darstellungen digital und dynamisch explorieren und ggf. mithilfe von unterstützenden Leitfragen kritisch hinsichtlich ihrer Aussagekraft bewerten. Dabei besteht ergänzend die Möglichkeit, die Ursprungsdaten in der Tabellenansicht einzusehen, um Vermutungen zu überprüfen.

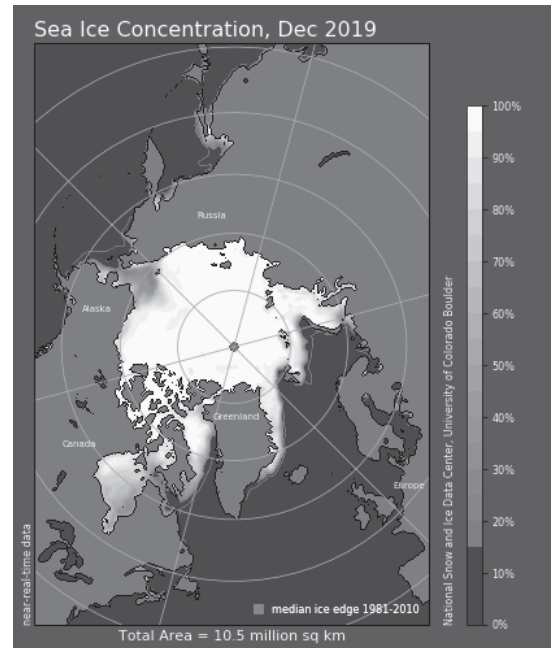


Abb. 1: Meereis an der Arktis im Dez. 2019 aus dem Datensatz von Fetterer 2017 (Image courtesy of the National Snow and Ice Data Center, University of Colorado, Boulder)

5 Was lässt sich aus Jahresverlaufskurven herauslesen?

Abbildung 2 zeigt eine Möglichkeit, die Daten der Ausdehnung graphisch aufzubereiten. Für ein bestimmtes Jahr werden die monatlichen Werte eingetragen und zu einer schwarzen Kurve verbunden. Im Gegensatz zu einer abgedruckten Grafik lässt sich über den Schieberegler eine dynamische Entwicklung abbilden. Von links nach rechts können sich die Schüler:innen von 1979 bis 2019 die jeweilige Jahreskurve anzeigen lassen. Der Erkundungsprozess wird über dynamische Visualisierung und systematische Variation gestützt, die als Stärken digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht gelten (Heintz et al. 2017, S. 16).

Über die Dynamik lässt sich ein Trend feststellen: Trotz Ausnahmen und Abweichungen ist eine Bewe-

gung der Jahreskurven Richtung x -Achse zu beobachten, je näher man an die Gegenwart herankommt (s. Abb. 2). Die aus der öffentlichen Diskussion bekannte Eisschmelze im Zuge der Klimakrise deutet sich in dieser dynamischen Tendenz an, lässt sich aber so nicht genauer quantifizieren.

Für eine nähere Untersuchung der Jahreskurven lassen sich weitere Kurven zu statistischen Maßen des Datensatzes anzeigen (s. Abb. 3). Die statistischen Maße beziehen sich dabei auf die 41 Werte des jeweiligen Monats im Zeitraum von 1979 bis 2019. So verbinden die Kurve der Maxima etwa die größten Ausdehnungen, die für die Monate jeweils gemessen worden sind. Bei der ersten Lektüre ist diese Darstellung nicht selbstevident, da man zunächst vermuten würde, dass es sich um das Jahr mit dem meisten Meereis handelt.

Erst wenn die Schüler:innen über den Schieberegler alle Jahre durchgehen und feststellen, dass keine Jahreskurve genau der Kurve der Maxima entspricht, lässt sich die Darstellung kritisch hinterfragen:

- Wieso gibt es kein Jahr, in dem in allen Monaten die größte Ausdehnung zu verzeichnen ist? Diese Frage sollte vor allem zum Anlass genommen werden, um die darstellungsbedingte Fehlvorstellung aufzulösen, bei der Kurve der Maxima handele es sich um ein konkretes Jahr.
- Warum gibt es Jahre, in denen für einen Monat das Maximum angenommen wird, aber in dem Vor- und Folgemonat desselben Jahres liegt die Kurve unter der Kurve der Maxima? Bezogen auf den Sachkontext führt dies zu der Erkenntnis, dass das Wetter im Unterschied zum Klima kurzfristigen Schwankungen unterworfen ist.
- Welche langfristige Tendenz ist zu erkennen? Hier lohnt es sich auch, die Kurve der Minima einzublenden, die ebenfalls nicht mit einer be-

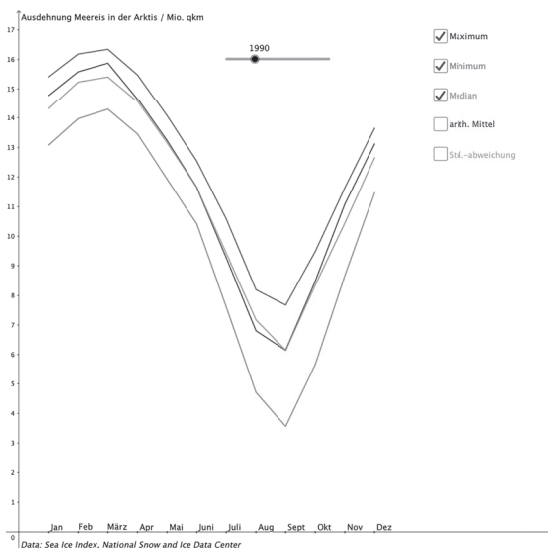


Abb. 3: Ergänzung der Jahreskurve zur Ausdehnung mit Kurven zu statistischen Maßen der Monatswerte (eigene Darstellung)

stimmten Jahreskurve übereinstimmt. Mit dem Schieberegler wird deutlich, dass die länger zurückliegenden Jahre näher an der Kurve der Maxima liegen bzw. teilweise Übereinstimmungen haben. Die Kurven der jüngeren Jahre nähern sich bei vereinzelt gegenläufigen Schwankungen der Kurve der Minima an. Die beiden Kurven der Extrema sind nicht nur Grenzen, sondern ihr Abstand veranschaulicht für jeden Monat die Spannweite.

- Die Frage, welches Jahr das Jahr mit dem meisten/wenigsten Meereis ist, wenn kein Jahr mit der Kurve der Maxima/Minima übereinstimmt, führt zur Notwendigkeit einer Präzisierung, was betrachtet werden soll: Die Identifikation von Extrema fällt am leichtesten, so sucht man etwa, in welchem Jahr das absolute Minimum angenommen worden ist. Alternativ kann man schauen, in welchem Jahr das Minimum für den eisreichsten Monat angenommen wird. Mit

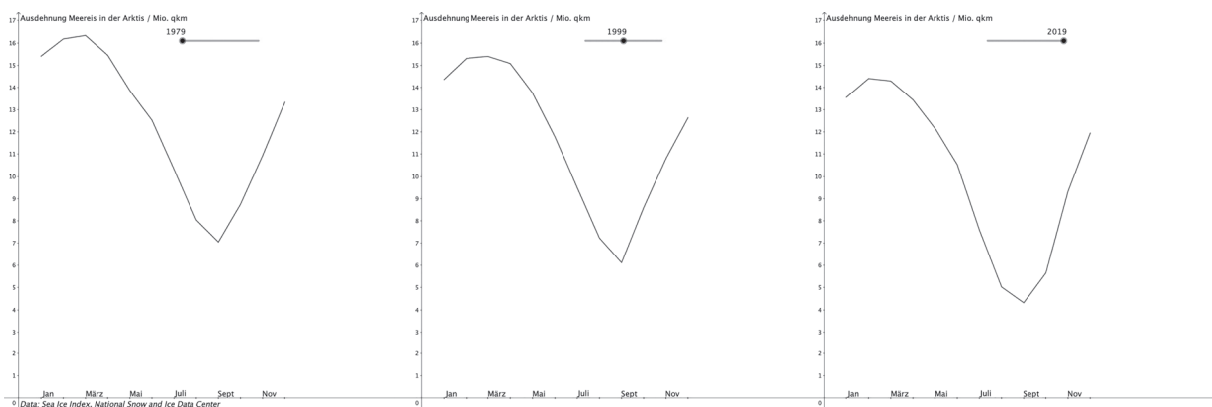


Abb. 2: Dynamik bei den Jahreskurven zur Ausdehnung des Meereises (eigene Darstellung)

Rückgriff auf die Ursprungsdaten bietet es sich an, für jedes Jahr die einzelnen Monatswerte zu addieren bzw. das arithmetische Jahresmittel zu bestimmen. Auf die Visualisierung beschränkt kamen Schüler:innen in einer Erprobung auf die Idee, die Fläche zu betrachten: Entweder soll die Fläche zwischen einer Jahreskurve und einer der Kurven der Extrema minimiert werden oder die Fläche unter der Jahreskurve soll maximiert/minimiert werden. Hinter der Betrachtung der Fläche unter den Jahreskurven verbirgt sich letztendlich die Grundvorstellung von der Mittelwertbildung des Integrals (Roth & Siller 2016, S. 9). An dieser Stelle würde es auch ausreichen, das arithmetische Mittel aller zwölf Monatswerte zu bilden, wofür man sich aber von der Darstellung lösen und die Ursprungsdaten heranziehen muss. Interessant ist vielmehr, dass Schüler:innen, ohne Integrale zu kennen, schon versuchten, mit der Fläche zu argumentieren.

Die Datendarstellung ist geeignet, um in einem konkreten visualisierten Sachkontext noch einmal die Unterschiede zwischen den statistischen Maßen zu thematisieren. Zum dynamisch gut zu beobachtenden Trend, dass die Ausdehnung des Meereises bis auf vereinzelte Abweichungen mit der Zeit weniger geworden ist, lässt sich auf den ersten Blick keine quantitative Aussage finden. Während die Kurve der arithmetischen Mittelwerte nur eine weitere Orientierung darstellt, wo die Jahreskurven liegen, nämlich eher ober- oder unterhalb, lassen sich mit der Kurve der Mediane mehr Informationen gewinnen. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass der Median einen Datensatz teilt, gilt für jeden Monat, dass an dieser Stelle die entsprechenden Ausschnitte von 20 Jahreskurven unter und von 20 über dem Median liegen müssen. Dies sind nicht immer dieselben, so schneiden einige Jahreskurven die Kurve der Mediane mehrmals. Für den Monat August lässt sich dann feststellen, dass von 2002 bis 2019 alle Jahre im August unter dem Median liegen. Das heißt, von den 20 Jahren mit dem geringsten Meereis im August liegen 18 in den vergangenen 20 Jahren. Dies ist ein quantitativer Hinweis auf die Abnahme der Meereis-Ausdehnung mit der Zeit. Ohne einen solchen Trend ist die Häufung sehr unwahrscheinlich und man hätte eine stärkere Streuung der Jahre mit wenig und mit viel Eis über den gesamten Zeitraum der 41 Jahre erwarten dürfen. Hinzu kommt, dass sich ähnliche Aussagen über andere Monate treffen lassen. Über die Kurve der Mediane lässt sich also eine quantitative Beschreibung

der Entwicklung in der Vergangenheit gewinnen, aber noch keine Prognose für die Zukunft treffen.

6 Regression als nicht neutrales Modellieren von Daten

In einer anderen Darstellung – jetzt bezogen auf die Fläche – kann man die Jahre auf der x -Achse abtragen. Dann müssen allerdings die Werte, die einem Jahr zugeordnet werden, beschränkt werden, damit die Abbildung übersichtlich bleibt. Im Vergleich zu der Darstellung von Abbildungen 2 und 3 gehen bei Abbildung 4 Informationen verloren. So ist zum Beispiel nicht ersichtlich, wie viele Werte in Nähe der Extrema liegen. Aus wirtschaftlicher Sicht ist zum Beispiel interessant, zu wissen, ob das Meereis über einen längeren Zeitraum so weit zurückgeht, dass die Nordwestpassage mit Schiffen befahrbar ist. In Abbildung 4 sind pro Jahr sowohl Maximum, arithmetisches Mittel und Minimum eingezeichnet. In den Medien wäre es allerdings eher üblich, nur ein statistisches Maß, vermutlich das arithmetische Mittel, in der Grafik zu berücksichtigen.

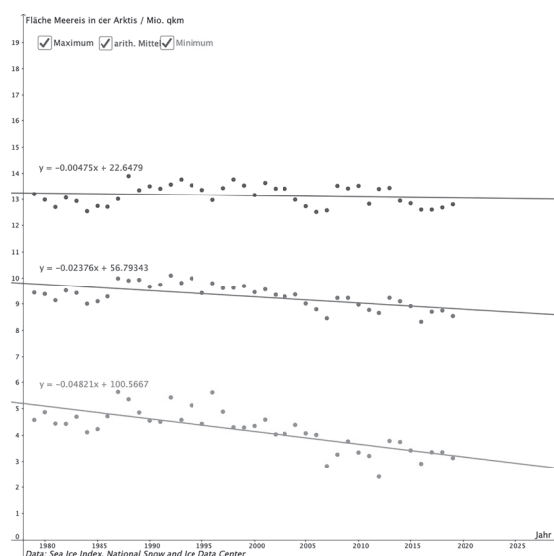


Abb. 4: Regressionsgeraden zur Meereis-Fläche (eigene Darstellung)

Ausgehend von dieser Darstellung fällt es leicht, eine Beschäftigung mit dem Thema der linearen Regression zu motivieren. Über die Zeit lässt sich bei allen drei statistischen Maßen ein linearer Trend vermuten. Mit einem Lineal können Schüler:innen testen, wie eine Gerade am besten zwischen den jeweiligen Punkten liegt. Bei dieser Anpassung einer Geraden an die Daten muss es nicht unbedingt um den Kalkül der genauen Funktionsgleichung gehen. Ausreichend ist auch unter Verwendung des digitalen Werkzeugs ein Grundverständnis zu entwickeln, was bei einer tatsächlichen Regression gemacht wird: Mithilfe

eines Graphen sollen die Datenpunkte zu einem linearen Funktionsmodell abstrahiert und verallgemeinert werden, wobei der Graph „möglichst nah“ an den Datenpunkten liegt. Im vorliegenden Fall sollten Schüler:innen wissen, dass „möglichst nah“ sich nicht auf die Entfernung von dem weitesten Datenpunkt bezieht, sondern auf eine Betrachtung aller Abweichungen.

Bei der Regression ist die Verbindung von „Daten und Zufall“ und „Modellieren“ offensichtlich (Biehler & Engel 2015, S. 238). Entsprechend oben zitierte Strukturgleichung $\text{Daten} = \text{Modell} + \text{Residuum}$ (Eichler & Vogel 2013b, S. 137) werden die realen Daten durch das Ignorieren der Residuen so weit vereinfacht, dass das mathematische Modell in Form der Gerade die Situation recht gut wiedergibt.

Als Beschreibung eines realen Phänomens, nämlich der Entwicklung des Meereises, ist zunächst der deskriptive Ansatz hinter diesem Vorgehen offensichtlich. Prognostisch ist die Regression zudem ein geeignetes Werkzeug, um neue Werte zu erzeugen, wobei ja auch schon die arithmetischen Mittelwerte nicht in der Menge der ursprünglichen Datenwerte liegen müssen. Anhand des Graphen kann eine Vorhersage für das nicht im Datensatz enthaltene Jahr 2020 abgelesen werden – bzw. mithilfe einer Funktionsgleichung berechnet werden. Damit wird der vorhersagende Aspekt innerhalb der deskriptiven Funktion deutlich. Die Originaltreue ist ein wichtiges Qualitätskriterium für die deskriptive Modellierung: Wie gut war die Vorhersage für 2020 im Vergleich zu den anschließend real gemessenen Daten? Mit dem neuen Messwert lässt sich auch die Gerade neu einzeichnen/berechnen und anpassen.

Gerade weil die Regressionsgerade auf den Daten aufbaut und Schlüsse darüber hinaus zulässt, müssen die Grenzen des Modells besprochen werden. Offensichtlich ist eine Extrapolation maximal bis zu dem Zeitpunkt sinnvoll, bei dem die x -Achse geschnitten wird, weil es keine negativen Meereisflächen gibt. Im Sinne einer Validierung kann die Qualität der Modellierung noch grundsätzlicher hinterfragt werden: Handelt es sich bei der Eisschmelze nicht um einen selbstverstärkenden Effekt, da weniger helle Eisflächen weniger Sonnenlicht reflektieren und es so noch heißer wird (vgl. Römer 2021)? Dies führt zu einer für die Modellierung typischen Abwägung, wie viel Ungenauigkeit man für wie wenig Modellierungsaufwand in Kauf nimmt.

Um an authentischen Daten zu verdeutlichen, dass die Gerade nicht der einzige mögliche Funktionstyp für eine Regression ist, können weitere, von Geo-

Gebra bereitgestellte Funktionstypen auf die Datenpunkte ausprobiert werden. Ziel des Vergleiches ist die Erkenntnis, dass die Gerade keine alternativlose Darstellung ist. Bei Gründen für andere Funktionstypen können Sachkontext und Funktionseigenschaften in Beziehung gesetzt werden. Dabei kann es in diesem Kontext nur um qualitative, grundsätzliche Überlegungen gehen, z. B. dass über eine Exponentialfunktion Verstärkungseffekte berücksichtigt werden können oder dass mit der Regression unter der Annahme von logistischen Wachstum die Information berücksichtigt wird, dass die Eisoberfläche eine natürliche Schranke nach unten aufweist.

Anhand von Abbildung 4 wird ein Zusammenhang für Schüler:innen besonders deutlich: Die Auswahl eines statistischen Maßes ist nicht trivial. Wird sonst oft wie selbstverständlich das arithmetische Mittel herangezogen, um einen Datensatz auf einen Wert zusammenzufassen, ist dies in Bezug auf den Sachkontext in zweierlei Hinsicht problematisch:

- Mit dem Hintergrundwissen von den Schwankungen zwischen Sommer und Winter (s. Abb. 1), gehen Informationen verloren. Pointiert auf den Sachkontext lässt sich sagen, dass der Eisbär ganzjährig eine bestimmte Meereisoberfläche als Lebensraum benötigt; das Zufrieren im Winter hilft ihm nichts, wenn er im Sommer nicht überlebt. Je nach Perspektive ist also gerade nicht das arithmetische Mittel die geeignete Größe für eine Beschreibung.
- Die Regressionsgeraden zu den drei ausgewählten statistischen Maßen fallen unterschiedlich aus. Je nach Rundung ergibt sich für die Jahresmaxima sogar vermeintlich eine konstante Funktion. Die Wahl des statistischen Maßes trägt entscheidend dazu bei, wie dramatisch die Eisschmelze als Symbol für die Klimakrise wahrgenommen wird. Gleichzeitig werden die Schüler:innen sensibilisiert, mit welcher selektiven Auswahl diese Entwicklung scheinbar verharmlost oder geleugnet werden kann.

Der Zusammenhang zwischen menschlichen Entscheidungen bei Datenauswahl und -auswertung und möglichen Interpretationen bei der Lektüre zeigt sich nicht nur mathematisch bei der Wahl des statistischen Maßes, sondern auch dabei, welches Merkmal aus dem Sachkontext gemessen bzw. betrachtet wurde. Beziehen sich Abbildung 2 und 3 auf die Ausdehnung, beruht Abbildung 4 auf den Messwerten der Fläche (s. Kap. 4 für den Unterschied). Dies ist bewusst gewählt, weil die Regressionsgerade der Maxima hier bei entsprechender Rundung besonders gut

genutzt werden kann, um zu behaupten, es gäbe überhaupt keine Eisschmelze. An dieser Stelle wird deutlich, dass der Unterschied zwischen notwendigerweise subjektiver Auswahl und Manipulation nicht so leichtfällt. Eine Antwort ist, dass es unredlich ist, ausschließlich den einzigen Ausreißer darzustellen, gerade weil alle Regressionsgeraden zur Ausdehnung eine erkennbare negative Steigung aufweisen.

Der unmittelbare Vergleich zwischen den drei verschiedenen Regressionsgeraden und die Antwort auf die Frage, welche Darstellung denn nun die Meeres-Entwicklung am besten beschreibe, führt zu dem Punkt, an dem (un)bewusst eine Entscheidung getroffen wird. Den Schüler:innen wird deutlich, dass über die Auswahl einer einzigen Geraden nur eine bestimmte Facette der Realität abgebildet wird. Statt einer neutralen Abbildung der Realität wird mit der Erstellung der Visualisierung eine bestimmte Sicht bevorzugt, gestaltet und vermittelt. Selbst beim Vorhaben, Realität wiederzugeben, sind es normative Entscheidungen, die zu verkürzten Darstellungen führen und damit die Wahrnehmung dieser Darstellungen prägen. Diese Entscheidungen betreffen sowohl die Ebene des Sachkontextes – z. B. Ausdehnung vs. Fläche – als auch mathematische Fragestellungen wie die Frage nach dem statistischen Maß.

7 Resümee des Bildungspotenzials

Im Alltag sind Schüler:innen und Bürger:innen oft mit Datenauswertungen konfrontiert, die vermeintlich die Realität neutral wiedergeben und in abstrakter Form beschreiben. Dazu brauchen sie die Kompetenz, diese Darstellungen zu lesen, zu entschlüsseln und auch zu interpretieren. Diese Lesekompetenz ist im didaktischen Diskurs verankert, so verweist der Dreiklang *read the data*, *read in the data* und *read beyond the data* auf die Kompetenzen, einer Darstellung einzelne Informationen zu entnehmen, den Datensatz als Ganzes auszuwerten sowie darüber hinausgehende Aussagen zu formulieren (Eichler & Vogel 2013b, S. 62).

In Anlehnung an Gutsteins *Reading and writing the world with mathematics* (2006) sollte für die Möglichkeit des Schreibens sensibilisiert werden, also dafür, dass menschliche Entscheidungen Einfluss auf die Daten, auf deren Darstellung und damit letztendlich auf die Wahrnehmung der Realität haben. Leser:innen von Daten stehen am Ende einer Kette, in der z. B. über die Erhebungsmethoden, Auswahl statistischer Größen und die visuelle Aufbereitung bestimmte Perspektiven festgeschrieben werden.

Das Beispiel der Jahreskurven hat gezeigt, dass es gar nicht mehr so leicht ist, mithilfe einmal erstellter Darstellungen bestimmte Informationen wie das Jahr mit dem geringsten Eis herauszufinden. Selbst unter Verwendung einer digitalen Dynamik und verschiedener statistischer Maße – die bei journalistischen Aufbereitungen selten zur Verfügung stehen – lassen sich bestimmte Trends nur noch qualitativ rekonstruieren.

Bei der Regressionsanalyse verschiedener Werte wird die Verbindung von Statistik und Modellierung deutlich. Die Auseinandersetzung mit dem Sachkontext unter Zuhilfenahme von Mathematik wird von menschlichen Entscheidungen geprägt und ist insbesondere keine Abbildung, bei der die mathematische Beschreibung eindeutig, zwingend und neutral ist. Der Transfer aus dem Modellierungsdiskurs, einer deskriptiven Funktion von Mathematik eine normative entgegenzustellen, ist hilfreich, um den Gestaltungsaspekt offenzulegen, der der Datenauswertung inhärent ist.

Bei Modellen wird den Modellierenden Intentionalität in Bezug auf ihren Gestaltungsspielraum unterstellt:

„Models are constructed by people who want an answer to a problem they see, based on their assumptions, using methods that they deem appropriate.“ (Yasukawa 1998, Herv. i. Orig.)

Im obigen Beispiel ist deutlich geworden, wie Daten auch so manipulativ präsentiert werden könnten, dass sie die (falsche) Behauptung stützen, es gebe gar keine Eisschmelze. Aber selbst bei unbewussten Vorgängen ist das kritische Hinterfragen der Daten aus einer Modellierungsperspektive hilfreich. Statt der fertigen Datenauswertung als Produkt wird so für den Erstellungsprozess und dessen Auswirkungen auf dann noch mögliche Schlussfolgerungen über die Daten sensibilisiert.

Die Bewertung der Angemessenheit von Datendarstellungen gehört zu der höchsten Kompetenzstufe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I (Blum et al. 2019, S. 71). Die hier aufgezeigte Unterscheidung, bis wo Daten eigentlich Realität abbilden und ab wann mit ihrer Auswertung und Darstellung auch eine bestimmte Perspektive geprägt wird, macht die notwendige Reflexion sicherlich nicht leichter, scheint jedoch angesichts von *Fake News* und alternativer Fakten ein wichtiger Beitrag zur mündigen Teilnahme am gesellschaftlichen Diskurs zu sein.

Anmerkungen

- 1 Zit. n. <https://www.zdf.de/nachrichten/politik/coronas-laschet-35-inzidenz-check-100.html> (Zugriff: 27.04.2021).
- 2 In anderen Kontexten wird zwischen den beiden Begriffen normativ und präskriptiv auch in Abgrenzung zu deskriptiv unterschieden: So legt die präskriptive Didaktik den Weg zu dem Ziel fest, das aus Sicht einer normativen Didaktik erstrebenswert ist, während die deskriptive Didaktik den Ist-Zustand beschreibt (Winter 1984, S. 122).
- 3 Dieses Argument findet sich in der Reaktion der CDU auf das Video „Die Zerstörung der CDU“ des YouTubers Rezo (Butterwegge 2020, S. 211).
- 4 Der Datensatz umfasst für die Betrachtung klimatischer Entwicklungen eine relativ kurze Zeitspanne. Um Schüler:innen transparent zu machen, dass der Ausschnitt aber keine erdgeschichtliche Anomalie darstellt, sondern in den Trend passt, kann z. B. auf die im Weltklima-Bericht dokumentierte historische Oberflächentemperaturveränderung verwiesen werden (Masson-Delmotte et al. 2021, S. 6).
- 5 Die Lernumgebungen werden auf Nachfrage gerne vom Verfasser zur Verfügung gestellt.

Danksagung

Ein Dank gilt an dieser Stelle den beiden Personen, die in ihren Gutachten konstruktive Rückmeldung und hilfreiche Literaturverweise gegeben haben.

Literatur

- Biehler, R.; Engel, J. (2015): Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In: Bruder, R. et al. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin; Heidelberg: Springer Spektrum, S. 221–251.
- Bildungsministerium Mecklenburg-Vorpommern (Hrsg.) (2015): Rahmenplan für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe. Mathematik, https://www.bildung-mv.de/downloads/unterricht/rahmenplaene_allgemeinbildende_schulen/Mathematik/Rahmenplan_2015_MV_Mathematik_Sek_II.pdf (Zugriff: 05.05.2021).
- Bildungsministerium Österreich (Hrsg.) (2019): Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> (Zugriff: 05.05.21).
- Bildungssenatorin Bremen (Hrsg.) (2008): Mathematik. Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe – Qualifikationsphase –, Bremen, https://www.lis.bremen.de/sixcms/media.php/13/MAT_GyQ_2008.pdf (Zugriff: 05.05.2021).
- Blum, W.; Roppelt, A.; Müller, M. (2019): Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik. In: Stanat, P. et al. (Hrsg.): *IQB-Bildungstrend 2018. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I im zweiten Ländervergleich*. Münster; New York: Waxmann, S. 60–71.
- Butterwegge, C. (2020): Die zerrissene Republik. Wirtschaftliche, soziale und politische Ungleichheit in Deutschland. Bonn: bpb.
- Eichler, A.; Vogel, M. (2013a): Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse als Modellierung. In: Borromeo Ferri, R.; Greefrath, G.; Kaiser, G. (Hrsg.): *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer, S. 163–180.
- Eichler, A.; Vogel, M. (2013b): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. 2., akt. Auflage. Wiesbaden: Springer.
- Engel, J.; Kuntze, S. (2011): From Data to Functions: Connecting Modelling Competencies and Statistical Literacy. In: Kaiser, G. et al. (Hrsg.): *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. ICTMA 14*. Dordrecht et al.: Springer, S. 397–406.
- Fetterer, F. et al. (2017 [tägl. akt.]): Sea Ice Index, Version 3. [1979–2019]. Boulder: National Snow and Ice Data Center (NSIDC), <https://doi.org/10.7265/N5K072F8> (Zugriff: 17.02.2020).
- Freudenthal, H. (1978): Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München; Wien: Oldenbourg.
- Greefrath, G.; Vorhölter, K. (2016): Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries, Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1 (Zugriff: 09.12.2020).
- Gutstein, E. (2006): Reading and writing the world with mathematics. Towards a pedagogy for social justice. New York; London: Routledge.
- Heintz, G. et al. (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. Menden: medienstatt.
- Hersh, R. (1991): Mathematics has a front and a back. In: *Synthese* 88, S. 127–133.
- Hinrichs, G. (2008): Modellierung im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum.
- Jauß, H. R. (1982): Ästhetische Erfahrung und literarische Hermeneutik. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- KMK (Hrsg.) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (Zugriff: 11.04.2019).
- Krüger, K. (2016): Statistische Grundbildung fördern. In: *Mathematik lehren* 197, S. 2–7.

- Lengnink, K. (2005): Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In: Lengnink, K.; Siebel, F. (Hrsg.): *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen*. Mühltal: Allgemeine Wissenschaft, S. 21–36.
- Masson-Delmotte, V. et al. (Hrsg.) (2021): Climate Change 2021. The Physical Science Basis. Summary for Policymakers. IPCC: https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/downloads/report/IPCC_AR6_WGI_SPM_final.pdf (Zugriff: 28.12.2021).
- National Snow & Ice Data Center (Hrsg.) (2020): All About Sea Ice. <https://nsidc.org/cryosphere/seaice/index.html> (Zugriff: 29.12.2021).
- Pohlkamp, S. (2021a): Digitale Visualisierungen authentischer Daten als Querverbindung zwischen statistical literacy und Modellierung. In: Hein, K. et al. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021*. Münster: WTM Verlag, S. 287–290.
- Pohlkamp, S. (2021b): Daten zum Arktis-Eis auswerten. Digitale Visualisierungen erkunden und bewerten. In: *Mathematik lehren* 227, S. 34–37.
- Römer, J. (2021): Der gefährliche Dominoeffekt der Klimakippunkte. In: Der Spiegel, <https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/klima-der-gefaehrliche-dominoeffekt-der-klimakippunkte-a-9064b00f-f558-4f93-8a6c-9d9a1978b6dd> (Zugriff: 29.07.2021).
- Roth, J.; Siller, H.-S. (2016): Bestand und Änderung. Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. In: *Mathematik lehren* 199, S. 2–9.
- Sjuts, J. (2009): Mit Mathematik Wirklichkeit schaffen. In: Leuders, T.; Hefendehl-Hebeker, L.; Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, S. 190–197.
- Vohns, A. (2013): Relative Armutsgefährdung – nur eine Zahl? In: *Der Mathematikunterricht* 59 (4), S. 49–58.
- Winter, H. (1984): Didaktische und methodische Prinzipien. In: Heymann, H. W. (Hrsg.): *Mathematikunterricht zwischen Tradition und neuen Impulsen*. Köln: Aulis-Verlag Deubner, S. 116–147.
- Yasukawa, K. (1998): Looking at mathematics as technology: implications for numeracy. In: *Proceedings of the First Mathematics Education and Society Conference*, <http://www.nottingham.ac.uk/csme/meas/papers/yasukawa.html> (Zugriff: 06.07.2021).

Anschrift des Verfassers

Stefan Pohlkamp
Didaktik der Mathematik
RWTH Aachen University
Templergraben 55
52056 Aachen
stefan.pohlkamp@matha.rwth-aachen.de